Soustavy OLDR 1. řádu – „písemné" Repetitorium MA2

V „písemné" přednášce ze 16.3.2020 a v příloze k této přednášce je uvedeno několik nejjednodušších (jednoduchých) řešených příkladů, a zde je ještě několik, snad užitečných, dalších jednoduchých příkladů (řešených), které doplňují přednášky 6.4. a 7.4. tohoto semestru.

V přednášce 16.3.20 a v její příloze jsou tyto řešené příklady:

1. Počáteční úloha pro homogenní soustavu (str. 7 přednášky)
   (derivace funkce $x=x(t)$ budeme zde značit $\dot{x}(t)$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1(t) - 6x_2(t)\end{aligned}, \quad x_1(0)=-1, \quad x_2(0)=2$$

2. Počáteční úloha pro nehomogenní soustavu
   (příloha, str. 1–4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \qquad\qquad -1\end{aligned}, \quad x_1(0)=-1, \; x_2(0)=2$$

3. Obecné řešení homogenní soustavy, jejíž matice má dvojnásobné vlastní číslo – pro „zájemce" (str. 5–6 přílohy)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1(t) - x_2(t)\end{aligned}$$

4. Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní soustavu, jejíž matice má vlastní čísla komplexní – pro „zájemce" (str. 6–10 přílohy)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \qquad x_2(t) + \cos t \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \qquad + 2\end{aligned}, \quad x_1(0)=1, \; x_2(0)=2$$

A zde jsou další řešené příklady (snad jako pomůcka k pochopení metody řešení soustav OLDR 1. řádu, i jako cvičení řešení soustav)

(1.) $\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$, $x_1(0) = 1$

$\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + x_2(t)$, $x_2(0) = -1$

Řešení: danou soustavu můžeme „přepsat" „vektorově"

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

matici dané soustavy označme $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

(i) pak, vlastní čísla matice A jsou řešení rovnice $|A - \lambda I| = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda , & -1 \\ -4 , & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad , \text{ tj. } (\lambda-1)^2 - 4 = 0, \text{ tj. } \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

neboli $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, tedy $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$

(ii) vlastní vektory, příslušné vlastním číslům λ_1, λ_2 :

$\lambda_1 = 3$; vlastní vektor $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice

$-2v_{11} - v_{21} = 0$, tedy $v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$,

$\lambda_2 = -1$: vlastní vektor $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice

$2v_{12} - v_{22} = 0$, tedy $v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$;

zvolíme-li $\alpha = 1$ („nejjednodušší volba"), pak fundamentální systém řešení soustavy je

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad , \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

fundamentální matice je $\qquad V(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}, & e^{-t} \\ -2e^{3t}, & 2e^{-t} \end{pmatrix}, \; t \in R$

a obecné řešení homogenní soustavy je $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_H = V(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$,

tedy, $\quad (*) \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_H = \begin{pmatrix} e^{3t}, & e^{-t} \\ -2e^{3t}, & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \; t \in R, \; c_1, c_2 \in R$

Řešení úlohy počáteční $\quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

dosazením do (*) : $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

a $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, tedy pak

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$ a tedy

a $\quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{poč} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t}, & e^{-t} \\ -2e^{3t}, & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ -6e^{3t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}, \; t \in R$

V dalších příkladech už budeme „počítat" rychleji (stručněji), komentáře k příkladu 1 lze „použít" i v příkladech dalších.

(2) Počáteční úloha pro soustavu

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \quad x_1(0) = 2$$
$$\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t), \quad x_2(0) = 1$$

(i) obecné řešení soustavy:

matice soustavy: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, vlastní čísla matice A : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 1 \\ 3, & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

vlastní vektory matice A, příslušné vlastním číslům

$\lambda_1 = 1$: $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice $v_{11} + v_{21} = 0$,

(volíme) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 5$: $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice $3v_{12} - v_{22} = 0$,

(volíme) $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

Pak fundamentální systém soustavy je $v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$, $v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$,

a obecné řešení soustavy: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}, & e^{5t} \\ -e^{t}, & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $t \in R$, $c_1, c_2 \in R$

(ii) Řešení počáteční úlohy:

$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, tedy $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

tedy $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{poč} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{t}, & e^{5t} \\ -e^{t}, & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^{t} + 3e^{5t} \\ -5e^{t} + 9e^{5t} \end{pmatrix}$, $t \in R$

3 $\quad \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 2x_2(t)\,,\qquad x_1(0) = 1$

$\quad \dot{x}_2(t) = x_2(t) + 4x_2(t)\,,\qquad x_2(0) = -2$

(i) obecné řešení soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$ vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$:

výpočet: $\begin{vmatrix} 1-\lambda\,, & -2 \\ 1\,, & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

Vlastní vektory:

$\lambda_1 = 2$; $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice $-v_{11} - 2v_{21} = 0$,

„vezmeme" $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$; $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ je řešením rovnice $-2(v_{12} + v_{22}) = 0$,

„vezmeme" $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

Pak fundamentální systém je $\quad v_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\,,\ v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}\,,\ t \in R$

a obecné řešení soustavy je $\quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}\,, & e^{3t} \\ -e^{2t}\,, & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ t \in R,\ c_1, c_2 \in R$

(ii) Řešení počáteční úlohy:

$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, tj. $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tedy $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, a pak

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{poč} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}\,, & e^{3t} \\ -e^{2t}\,, & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^{3t} \\ e^{2t} - 3e^{3t} \end{pmatrix},\ t \in R$$

4) Obecné řešení nehomogenní soustavy :

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + 2\sin t$$

(i) řešení soustavy homogenní

matice soustavy $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$:

$$|A - \lambda I| = 0 : \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda \, , & -3 \\ 1 \, , & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$$

vlastní vektory matice A : $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(v_{11} - 3v_{21} = 0 \right)$

$\lambda_2 = -1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(v_{12} - v_{22} = 0 \right)$

a fundamentální systém je: $v_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$, $v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $t \in R$

a obecné řešení homogenní soustavy: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{t} \, , & e^{-t} \\ e^{t} \, , & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $t \in R$, $c_1, c_2 \in R$

(ii) partikulární řešení soustavy s „pravou stranou" $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ najdeme odhadem (označme partikulární řešení $x_p(t)$)

zkusme :

$$(x_p)_1(t) = A\cos t + B\sin t$$
$$(x_p)_2(t) = C\cos t + D\sin t \qquad , t \in R$$

(„analogicky" k odhadu při řešení OLDR 2. řádu)

Po dosazení do soustavy dostáváme:

$$-A\sin t + B\cos t = 2(A\cos t + B\sin t) - 3(C\cos t + D\sin t)$$
$$-C\sin t + D\cos t = A\cos t + B\sin t - 2(C\cos t + D\sin t) + 2\sin t,$$

a po úpravě:

$$(-A - 2B + 3D)\sin t + (-2A + B + 3C)\cos t = 0$$
$$(\quad -B - C + 2D)\sin t + (-A \quad + 2C + D)\cos t = 2\sin t \quad , t \in R,$$

a srovnáním koeficientů u funkcí $\sin t$, resp. $\cos t$ dostáváme soustavu lineárních rovnic pro koeficienty A, B, C, D v „odhadu":

$$\begin{aligned} A + 2B \quad\quad - 3D &= 0 \\ -2A + B + 3C \quad\quad &= 0 \\ -A \quad\quad + 2C + D &= 0 \\ -B - C + 2D &= 2 \end{aligned}$$

(„řešení" zde nepíšu – vhodná Gaussova eliminace)

soustava má právě 1 řešení: $A = 0, B = 3, C = -1, D = 2,$

tedy, $(x_p)_1(t) = 3\sin t$, $(x_p)_2(t) = -\cos t + 2\sin t$, $t \in R$

a obecné řešení nehomogenní soustavy je $\left(x(t) = x_H(t) + x_p(t)\right)$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t, & e^{-t} \\ e^t, & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R, \ t \in R,$$

nebo lze psát

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 3\sin t \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in R, \ c_1, c_2 \in R$$

A nakonec: řešení počáteční úlohy $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 - 1 \end{pmatrix}$, pak c_1, c_2 jsou řešení soustavy $\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -1, \end{aligned}$

tedy $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, a $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{poč} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{-t} + 3\sin t \\ e^t - 2e^{-t} - \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}, \ t \in R$

a tři příklady „navíc" pro „zájemce":

(5) Trochu „náročnější" příklad řešení homogenní soustavy:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t), & x_1(0) &= 2\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_3(t) & x_2(0) &= 0\\
\dot{x}_3(t) &= 6x_1(t) - 6x_2(t) + 5x_3(t) & x_3(0) &= -3
\end{aligned}$$

„maticově"
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 6 & -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 6 & -6 & 5\end{pmatrix},$$

a
$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix}-3-\lambda, & 4, & -2\\ 1, & -\lambda, & 1\\ 6, & -6, & 5-\lambda\end{pmatrix};$$

Rovnice pro vlastní čísla matice A, tj. $|A - \lambda I| = 0$ má tvar (po „delším" počítání determinantu $|A - \lambda I|$):

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0, \quad \text{tj. } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$$

jsou vlastní čísla matice A (příklad je „jednoduchý")

Výpočet vlastních vektorů:

$\lambda_1 = 1$: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ je řešením soustavy (volíme $v_{11} = 1$)
$$\begin{aligned}-4v_{11} + 4_{21} - 2v_{31} &= 0\\ v_{11} - v_{21} + v_{31} &= 0\end{aligned}$$

$\lambda_2 = 2$: $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ je řešením soustavy (volíme $v_{22} = 1$)
$$\begin{aligned}v_{12} - 2v_{22} + v_{32} &= 0\\ 6v_{12} - 6v_{22} + 3v_{32} &= 0\end{aligned},$$

tj.
$$\begin{aligned}v_{12} - 2v_{22} + v_{32} &= 0\\ 2v_{12} - 2v_{22} + v_{32} &= 0\end{aligned}$$

$\lambda_3 = -1$: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ je řešením soustavy (zvolíme $v_{13}=1$) $\quad v_{13} + v_{23} + v_{33} = 0$; $v_{13} - v_{23} + v_{33} = 0$;

Tedy, fundamentální systém je

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad t \in R$$

a obecné řešení dané soustavy je dáno

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}, & 0, & e^{-t} \\ e^{t}, & e^{2t}, & 0 \\ 0, & 2e^{2t}, & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in R, \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$

Řešení úlohy počáteční

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} : \text{„má být"} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}_{poč} = \begin{pmatrix} e^{t}, & 0, & e^{-t} \\ e^{t}, & e^{2t}, & 0 \\ 0, & 2e^{2t}, & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} + e^{-t} \\ e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

Poznámka: Výpočet $A^{-1}(0)$ zde neuvádím, myslím, že to není problém (viz LA) (zkouška „vyšla" $A(0) . A^{-1}(0) = I$)

6 Příklad soustavy OLDR 1. řádu, kdy matice soustavy má dvojnásobné vlastní číslo (tj. charakteristická rovnice matice soustavy má dvojnásobný kořen)

$$\begin{aligned} (1)\quad & \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ (2)\quad & \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned} \qquad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \,; & 1 \\ -1 \,; & 4-\lambda \end{pmatrix}$, a vlastní čísla jsou řešením rovnice $|A - \lambda I| = 0$, tj. zde "$(*)\ \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda - 3)^2 = 0$,

tedy $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

Dále budeme řešit „eliminací" za pomoci řešení OLDR 2. řádu:

z (1) plyne: $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t)$, a dosadíme

do (2): $(\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1) = -x_1(t) + 4(\dot{x}_1(t) - 2x_1(t))$,

tedy pro $x_1(t)$ dostáváme rovnici 2. řádu:

$$(3)\quad \ddot{x}_1(t) - 6\dot{x}_1(t) + 9x_1(t) = 0$$

charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ (srovnejte s $(*)$), tj. $\lambda_{1,2} = 3$

a obecné řešení rovnice (3) je $x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$, $t \in R$, $c_1, c_2 \in R$;

potom $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t) = (c_2 + 3(c_1 + c_2 t)) - 2(c_1 + c_2 t))e^{t}$,

tj. $x_2(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t) e^{3t}$, $c_1, c_2 \in R$, $t \in R$

„A vektorově" zapsáno:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in R, t \in R$$

nebo $$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \,, & t e^{3t} \\ e^{t} \,; & (1+t) e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad —\!\!\shortparallel\!\!— .$$

(7) Poslední příklad – soustava dvou OLDR 1. řádu, kdy matice soustavy má vlastní čísla komplexní.

(1) $\dot{x}_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t)$, $x_1(0) = 3$

(2) $\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t)$, $x_2(0) = 1$

(i) obecné řešení soustavy:

matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; vlastní čísla matice A: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$,

neboť: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda, & -3 \\ 3, & 1-\lambda \end{pmatrix}$, a tedy rovnice pro vlastní čísla

je $\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -3 \\ 3, & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $(\lambda-1)^2 + 9 = 0$, a řešení jsou $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$
(tj. $(\lambda-1)^2 = -9$) (*)

1) řešme soustavu (eliminací) pomocí OLDR 2. řádu:

z (1) $\Rightarrow$ $x_2(t) = \frac{1}{3}\left(x_1(t) - \dot{x}_1(t)\right)$

z (2) pak dostáváme: $\frac{1}{3}\left(\dot{x}_1(t) - \ddot{x}_1(t)\right) = 3x_1(t) + \frac{1}{3}\left(x_1(t) - \dot{x}_1(t)\right)$,

úpravou $\ddot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t) = -9x_1(t) - x_1(t) + \dot{x}_1(t)$,

tedy (3) $\ddot{x}_1(t) - 2\dot{x}_1(t) + 10x_1(t) = 0$,

charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, a tedy $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{36}}{2}$,

tj. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ (viz (*))

Řešení (obecné) $x_1(t) = (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)\, e^t$, $c_1, c_2 \in R$, $t \in R$

(zvolili jsme fundamentální systém řešení rovnice (3) reálný)

Pak $x_2(t) = \frac{1}{3}\left(x_1(t) - \dot{x}_1(t)\right) =$

$= \frac{1}{3} e^t \left[c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t - \left((c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3t) + \right.\right.$
$\left.\left. + 3(-c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t) \right) \right]$

Tedy, $x_1(t) = e^t\,(c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t)$

$x_2(t) = e^t\,(+c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)$,

vektorově $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t\cos 3t \\ e^t \sin 3t\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \sin 3t \\ -e^t\cos 3t\end{pmatrix}$, $t \in R$, $c_1, c_2 \in R$

nebo $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos 3t\,, & e^t\sin 3t \\ e^t \sin 3t\,, & -e^t\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}$, $t\in R$, $c_1, c_2 \in R$

2) zkusme ještě navíc řešení pomocí komplexních exponenciel a „komplexních" vlastních vektorů (bez užití OLDR 2. řádu):

jsou-li vlastní čísla matice A komplexní, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$, zkusme najít vlastní vektory, příslušné k těmto vlastním číslům:

$\lambda_1 = 1+3i$: vlastní vektor $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21}\end{pmatrix}$ (v_{11}, v_{21} teď z $\mathbb{C}$)

je řešením rovnice $-3i v_{11} - 3v_{21} = 0$, tj. $i v_{11} + v_{21} = 0$,

a zvolíme-li $v_{11} = 1$, pak $v_{21} = -i$, tedy, $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 1-3i$; vlastní vektor $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22}\end{pmatrix}$ ($v_{12}, v_{22} \in \mathbb{C}$)

je řešením rovnice $3i v_{12} - 3v_{22} = 0$, tj. $i v_{12} - v_{22} = 0$,

a zvolíme-li $v_{12} = 1$, pak $v_{22} = i$, tedy, $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix}$

a komplexní fundamentální systém je

$$\tilde{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\end{pmatrix} e^{(1+3i)t}\,, \quad \tilde{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix} e^{(1-3i)t}$$

a „upravíme – li" $\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)$ ($e^{(1\pm 3i)t} = e^t(\cos 3t \pm \sin 3t)$) :

$$\tilde{v}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t + i\sin 3t \\ -i(\cos 3t + i\sin 3t \end{pmatrix} e^t = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}$$

a $$\tilde{v}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t - i\sin 3t \\ i(\cos 3t - i\sin 3t \end{pmatrix} e^t = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} - i e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} ;$$

A nyní opět, díky linearitě soustavy OLDR 1. řádu (jako u OLDR 2. řádu), je reálná část i imaginární část vektorů $\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)$ řešením naší homogenní soustavy, tedy, <u>fundamentální systém řešení</u> dané soustavy je

$$v_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} , \quad v_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} , \quad t \in R ,$$

což „vyšlo" i při prvním způsobu řešení soustavy; a jistě <u>fundamentální matice</u>:
$$V(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos 3t , & e^t\sin 3t \\ e^t\sin 3t , & -e^t\cos 3t \end{pmatrix}, t \in R .$$

(ii) <u>řešení počáteční úlohy</u> :

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} : \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

ale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tj. $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, a

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{\text{př}}} = \begin{pmatrix} e^t\cos 3t , & e^t\sin 3t \\ e^t\sin 3t , & -e^t\cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} e^t(3\cos 3t - \sin 3t) \\ e^t(3\sin 3t + \cos 3t) \end{pmatrix} ,}$$

$t \in R$